Probabilités sur un univers fini

Vocabulaire et probabilités (vidéo)

Exercice 1 (vidéo)

1. $3 \times 2 \times 2 = 12$
   Robin peut s'habiller de 12 façons différentes.
2. $2 \times 1 \times 1 = 2$
   Robin peut s'habiller de 2 façons différentes sans noir.
   La probabilité que Robin ne porte pas de noir est donc égale à : $P(\bar{N}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
3. La probabilité qu'il porte au moins un habit noir est donc égale à : $P(N) = 1 - P(\bar{N}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Exercice 2 (vidéo)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,7 - 0,2 = 0,9.$

Exercice 3 (vidéo)

1. Il y a 5 parcours possibles :
   $MABCT - MABCDT - MABDT - MABDCT - MAET$
2. Il y a trois trajets qui passent par le point C, d'où $P(K) = \frac{3}{5}$.
   Il y a trois trajets qui passent par le point D, d'où $P(L) = \frac{3}{5}$.
   Il y a deux trajets qui passent à la fois par le point C et par le point D, d'où $P(K \cap L) = \frac{2}{5}$.
   On a $P(K \cup L) = P(K) + P(L) - P(K \cap L) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.
   On peut aussi remarquer qu'il n'existe qu'un seul chemin qui ne passe ni pas C, ni par D et utiliser alors l'événement contraire.

Exercice 4 (vidéo)

1. $C = A \cup B$.
   Or il y a toujours un des deux vendeurs ouverts, donc $P(C) = 1$.
2. L'événement D est l'événement contraire de C :
   $D = \overline{C} = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Loi de De Morgan)
   Ainsi, on a : $P(D) = P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 1 = 0$.
3. $E = A \cap B$.
   D'où :
   $P(E) = P(A \cap B)$
   $P(E) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
   $P(E) = P(A) + P(B) - P(C)$
   $P(E) = 0,6 + 0,8 - 1$
   $P(E) = 0,4$

Exercice 5 (vidéo)

1.

	Nombre de pièces présentant le défaut a	Nombre de pièces ne présentant pas le défaut a	Total
Nombre de pièces présentant le défaut b	500	1 000	1 500
Nombre de pièces ne présentant pas le défaut b	300	8 200	8 500
Total	800	9 200	10 000

2.

a. $p_1 = \frac{300+1000}{10000} = 0,13.$

b. $p_2 = \frac{8200}{10000} = 0,82.$

c. $0,9 \times 1300 = 1170$ pièces sont réparées.

$p_3 = \frac{8200+1170}{10000} = 0,937$

Exercice 6 (vidéo)

1.

	Europe	Amérique	Asie	Total
Hommes	972	200	628	1 800
Femmes	228	200	172	600
Total	1 200	400	800	2 400

2.

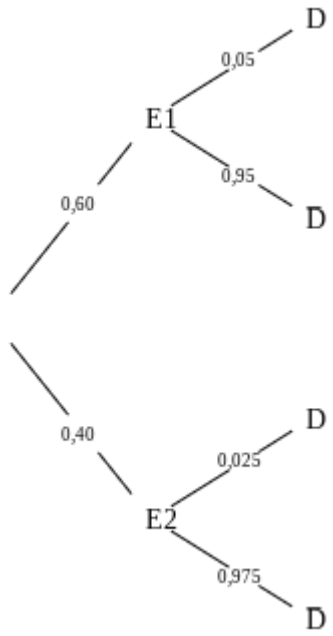
- $P(A) = \frac{600}{2400} = 0,25$
- $P(B) = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3}$
- $P(A \cap B) = \frac{172}{2400} \approx 0,071$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{600}{2400} + \frac{800}{2400} - \frac{172}{2400} = \frac{1228}{2400} \approx 0,512.$

3. $p_1 = \frac{228}{600} = 0,38$

4. $p_2 = \frac{228}{1200} = 0,19$

Probabilités conditionnelles (vidéo)

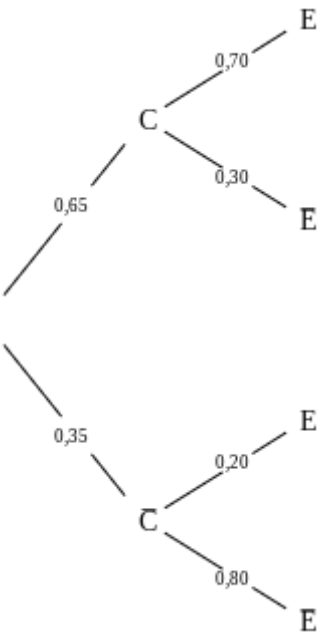
Exercice 7 (vidéo)

1. 

2. $P(E_1 \cap D) = 0,60 \times 0,05 = 0,03$
   $P(E_2 \cap D) = 0,40 \times 0,025 = 0,01$
   $P(D) = P(E_1 \cap D) + P(E_2 \cap D) = 0,03 + 0,01 = 0,04$
3. $P_D(E_1) = \frac{P(E_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,03}{0,04} = 0,75$
   La probabilité qu'une pièce provienne de la machine M_1 sachant qu'elle est défectueuse est égale à $0,75$.
   $P_D(E_2) = \frac{P(E_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,01}{0,04} = 0,25$
   La probabilité qu'une pièce provienne de la machine M_2 sachant qu'elle est défectueuse est égale à $0,25$.

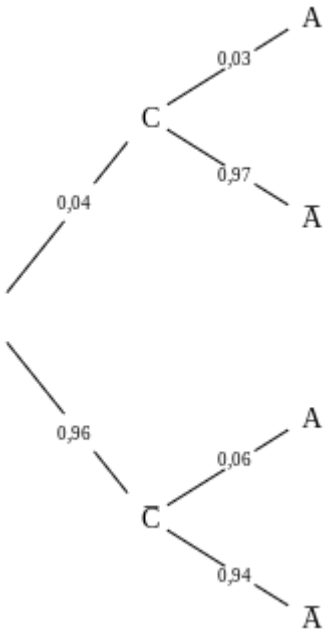
Exercice 8 (vidéo)

1. $P(C) = 0,65$
   $P_C(E) = 0,70$
   $P_{\bar{C}}(E) = 0,20$
2. Voir ci-contre.
3. $P(C \cap E) = 0,65 \times 0,70 = 0,455$
4. $P(\bar{C} \cap E) = 0,35 \times 0,20 = 0,07$
5. $P(E) = P(C \cap E) + P(\bar{C} \cap E) = 0,455 + 0,07 = 0,525$
6. $P_E(\bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap E)}{P(E)} = \frac{0,07}{0,525} \approx 0,133$



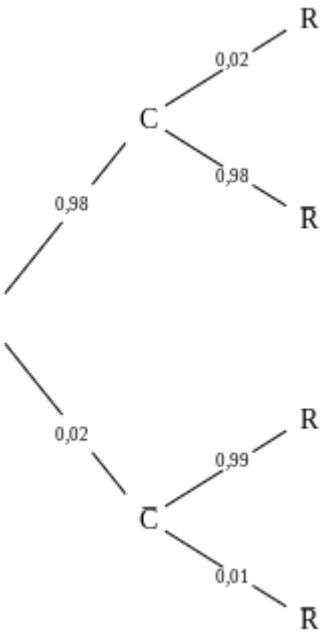
La probabilité qu'un écologiste soit pour la construction du barrage est d'environ 13,3 %.

Exercice 9 (vidéo)

1. $P(C) = 0,04$
   $P_C(A) = 0,03$
   $P_{\bar{C}}(\bar{A}) = 0,94$
2. 

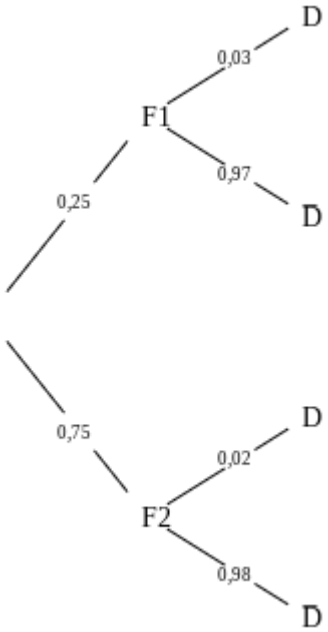
3. a. $P(C \cap A) = 0,04 \times 0,03 = 0,0012$
   b. $P(\bar{C} \cap A) = 0,96 \times 0,06 = 0,0576$
   c. $P(A) = P(C \cap A) + P(\bar{C} \cap A) = 0,0012 + 0,0576 = 0,0588$
   d. $P(\bar{C} \cap \bar{A}) = 0,96 \times 0,94 \approx 0,902$
   e. $P_{\bar{A}}(C) = \frac{P(C \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,04 \times 0,97}{1 - 0,0588} \approx 0,041$

Exercice 10 (vidéo)



1. $P(R) = P(C \cap R) + P(\bar{C} \cap R) = 0,98 \times 0,02 + 0,02 \times 0,99 = 0,0394$
2. $P_R(C) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0,98 \times 0,02}{0,0394} \approx 0,497$

Exercice 11 (vidéo)



$P_D(F_1) = \frac{P(F_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,25 \times 0,03}{0,25 \times 0,03 + 0,75 \times 0,02} = \frac{1}{3}$

Exercice 12 (vidéo)

1.



2. $p(R) = p(G \cap R) + p(T \cap R) + p(P \cap R) = \frac{195097}{567614} \times 0,91 + \frac{156033}{567614} \times 0,888 + \frac{216484}{567614} \times 0,928$
   $\approx 0,9108$
3. $p_R(T) = \frac{p(T \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{156033}{567614} \times 0,888}{\frac{195097}{567614} \times 0,91 + \frac{156033}{567614} \times 0,888 + \frac{216484}{567614} \times 0,928} \approx 0,268$

Indépendance (vidéo)

Exercice 13 (vidéo)

1. $P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$
   donc $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$
   donc A et B ne sont pas indépendants.
2. $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$
   donc $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$
   donc A et B sont indépendants.

Exercice 14 (vidéo)

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$

Exercice 15 (vidéo)

1. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,1 + 0,7 - 0,07 = 0,73$
   $P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,7 = 0,07$
   donc $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$
   donc A et B ne sont pas indépendants.
2. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2 + 0,8 - 0,84 = 0,16$
   $P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$
   donc $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

donc A et B sont indépendants.

Exercice 16 (vidéo)

1. Par indépendance $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Exercice 17 (vidéo)

1. Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,04 \times 0,02 = 0,0008$
   La probabilité que la file d'entrée soit vide **et** que le réservoir soit également vide au moins une fois dans la même journée est de 0,08 %.
2. $P(F) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,04 + 0,02 - 0,0008 = 0,0592$
3. $P(G) = 1 - P(F) = 0,9408$
   (ou $P(G) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0,96 \times 0,98 = 0,9408$)

Exercice 18 (vidéo)

- Par indépendance, $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,03 \times 0,07 = 0,0021$
- $P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,03 + 0,07 - 0,0021 = 0,0979$
- $P(E_3) = 1 - P(E_2) = 0,9021$
  (ou $P(E_3) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0,97 \times 0,93 = 0,9021$)
- $P(E_4) = P(A \Delta B) = P(E_2) - P(E_1) = 0,0979 - 0,0021 = 0,0958$

Exercice 19 (vidéo)

1. Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,02 \times 0,04 = 0,0008$
2. Par indépendance, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = (1 - 0,02)(1 - 0,04) = 0,9408$
3. $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,0592$ # ou $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \ldots$
4. $P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,0592 - 0,0008 = 0,0584$

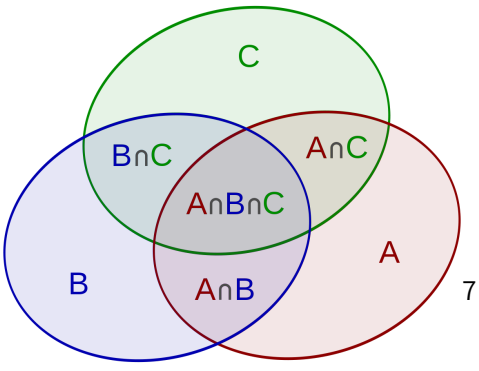
Exercice 20 (vidéo)

1. $P(A) \times P(B) = 0,05 \times 0,04 = 0,002$ et $P(A \cap B) = 0,01$
   donc $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$
   donc A et B ne sont pas indépendants.
2. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,01}{0,04} = 0,25$
3. $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,05 + 0,04 - 0,01 = 0,08$
4. $P(D) = 1 - P(C) = 1 - 0,08 = 0,92$

Exercice 21 (vidéo)

Notons :

- A : “le plip est en panne”
- B : “le récepteur est en panne”
- C : “le vérin est en panne”



On a :

- $P(A) = 0,001$
- $P(B) = 0,0005$
- $P(C) = 0,0001$

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$
$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A) \times p(B) - p(A) \times p(C) - p(B) \times p(C) + p(A) \times p(B) \times p(C)$
$p(A \cup B \cup C) = 0,00159935005$

Exercice 22 (vidéo)

La probabilité de survie de la ruche une année est : $0,05 \times 0,10 + 0,95 \times 0,90 = 0,86$.

Donc la probabilité de survie pendant trois années est $0,86^3 \approx 0,636$.