Probabilités sur un univers fini

Vocabulaire et probabilités

Vocabulaire des événements

- L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire constituent l'univers Ω.
  Par exemple, si on lance un dé l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
  Dans ce chapitre, on ne considérera que des univers finis, c'est-à-dire avec un nombre fini d'issues possibles.
- Un événement A est un sous-ensemble de l'univers : $A \subset \Omega$.
  Par exemple, l'événement A "obtenir un nombre impair" est $A = \{1; 3; 5\}$.
- Un événement élémentaire est un événement ne possédant qu'une issue possible.
  Par exemple, l'événement B "obtenir un 6" est un événement élémentaire : $B = \{6\}$.
- Des événements A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$.
  Par exemple, les deux événements A et B précédents sont incompatibles : on ne peut pas obtenir à la fois un nombre impair et obtenir 6.
- L'événement contraire d'un événement A est l'événement constitué des issues n'appartenant pas à A, on le note $\bar{A}$.

  Dans notre exemple, $\bar{A} = \{2; 4; 6\}$. Il s'agit de l'événement "obtenir un nombre pair".

Modélisation

Lorsque l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de chaque issue tend vers une certaine valeur. On choisit alors cette valeur comme probabilité de l'issue pour modéliser l'expérience aléatoire. On définit ainsi une loi de probabilité.

Définitions : loi de probabilité, probabilité d'un événement

- Définir une loi de probabilité pour une expérience aléatoire dont l'univers des possibles est $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$, c'est associer à chaque issue e_i une probabilité p_i appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ tel que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
- La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$ est égale à la somme des probabilités des issues constituant A.

Exemple

Dans le cas d'un lancer de dé, on a : $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité : chaque issue à la même probabilité d'apparaître.

La probabilité d'obtenir un nombre impair est $P(\{1; 3; 5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Vocabulaire

Un événement impossible est un événement de probabilité nulle.
Un événement certain est un événement de probabilité égale à 1.

Propriété : probabilité de l'événement contraire ♡

Pour tout événement A, on a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple

La probabilité qu'une main au poker ne contiennent rien est $P(A) = 0,50118$.

Donc la probabilité qu'une main au poker contienne au moins une paire est $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,49882$.

Union et intersection d'événement

- $P(A \cap B)$ est la probabilité que A *et* B soit réalisés.
- $P(A \cup B)$ est la probabilité que A *ou* B soit réalisé. Attention, le *ou* est toujours inclusif en mathématiques, c'est-à-dire que les deux événements A et B peuvent être réalisés.

Propriété : probabilité de l'union de deux événements ♡

Pour tous événements A et B, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple

On tire une carte dans un jeu de 32.

On considère les événements A "on tire une dame" et B "on tire un cœur".

On a $P(A) = \frac{4}{32}$, $P(B) = \frac{8}{32}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ (probabilité de tirer la dame de cœur).

Donc la probabilité de tirer une dame ou un coeur est égale à :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

Probabilités conditionnelles

Définition : probabilité conditionnelle ♡

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé est noté $P_A(B)$ et est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

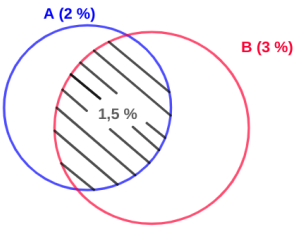
Exemple

Les individus d'une population peuvent être atteints de deux maladies a et b.

On choisit un individu au hasard dans la population.

On note respectivement A et B les événements "l'individu est atteint de la maladie a" et "l'individu est atteint par la maladie b".

On donne : $P(A) = 0,02$, $P(B) = 0,03$ et $P(A \cap B) = 0,015$.



Calculons la probabilité qu'un individu soit atteint par la maladie b sachant qu'il est déjà atteint par la maladie a : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,015}{0,02} = 0,75$.

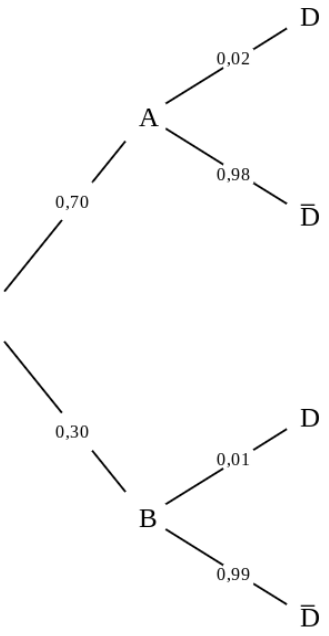
Calculons la probabilité qu'un individu soit atteint par la maladie a sachant qu'il est déjà atteint par la maladie b : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,015}{0,03} = 0,5$.

Conséquence : principe multiplicatif

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Remarque

C'est pourquoi on multiplie les probabilités d'une branche d'un arbre de probabilités lorsqu'on veut calculer la probabilité de cette branche. C'est le principe multiplicatif.



Exemple

Des pièces identiques sont produites par deux ateliers A et B.

- L'atelier A produit 70% des pièces dont 2% de pièces défectueuses.
- L'atelier B produit 30% des pièces dont 1% de pièces défectueuses.

On prélève au hasard une pièce de la production totale.
Ci-contre est représenté l'arbre de probabilité de cette situation où D est l'événement : "la pièce prélevée a un défaut".
Calculons la probabilité de prélever une pièce défectueuse de l'atelier A :
$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,70 \times 0,02 = 0,014$

Indépendance

Définition : indépendance de deux événements

Soient A et B deux événements.
A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque

Lorsque $P(A) \neq 0$cette définition équivaut à $P_A(B) = P(B)$ ce qui correspond bien à une notion intuitive d'indépendance.

Exemples

- On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
  On considère les événements A "on tire un trèfle" et B "on tire un as".
  Montrons que ces deux événements sont indépendants.
  - On a $P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ donc $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$
  - L'événement $A \cap B$ est "on tire l'as de trèfle", donc $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$

  On a bien $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
  Ainsi les événements A et B sont indépendants : la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

- Deux employés sont responsables d'une chaîne de montage. Ils leur arrivent d'être absents indépendamment l'un de l'autre.
  Leurs probabilités d'absences un jour donné sont respectivement $P(E_1) = 0,02$ et $P(E_2) = 0,03$.

  Calculons la probabilité que ces deux employés soient absents le même jour :
  $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = 0,02 \times 0,03 = 0,0006$

Propriété : indépendance et événement contraire

Soient A et B deux événements.
Si A et B sont indépendants alors :

- $\bar{A}$ et B sont indépendants.
- A et $\bar{B}$ sont indépendants,
- $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.